

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Проректор по учебной работе и  
довузовской подготовке**

**А.А. Воронов**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Уравнения математической физики
<b>по направлению:</b>	Техническая физика
<b>профиль подготовки:</b>	Техническая физика космических летательных аппаратов Физтех-школа Аэрокосмических Технологий кафедра высшей математики
<b>курс:</b>	3
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестры, формы промежуточной аттестации:

5 (осенний) - Дифференцированный зачет

6 (весенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 135 всего, в том числе:

лекции: 75 час.

семинары: 60 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 150 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 315, всего зач. ед.: 7

Количество контрольных работ, заданий: 4

Программу составил: В.В. Шаньков, канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры высшей математики 21.05.2020

## Аннотация

В курсе изучаются основные краевые задачи математической физики. Приводится классификация линейных дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка, основанная на их приведении к каноническому виду. Вводится понятие характеристической поверхности.

Подробно рассматривается классическая задача Коши для уравнения колебаний струны. Выводится формула Даламбера, определяется область зависимости классического решения от начальных данных, доказывается корректность задачи. Рассматривается смешанная задача для полубесконечной струны.

Рассматриваются элементы теории обобщённых функций: преобразование Фурье и свёртка и обобщённых функций, дифференцирование преобразования Фурье и свёртки обобщённых функций. Вводится понятие обобщённого по Л. Шварцу решения линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами в заданной области и его вычисления с помощью фундаментального решения. Постановка обобщённой задачи Коши для линейного дифференциального уравнения с частными производными с постоянными коэффициентами.

Фундаментальное решение трёхмерного волнового уравнения. Обобщённая задача Коши для трёхмерного волнового уравнения, формула Кирхгофа. Единственность классического решения задачи Коши.

Фундаментальное решение уравнения теплопроводности. Формула Пуассона обобщённого решения задачи Коши для уравнения теплопроводности как свёртка источника с фундаментальным решением. Принцип максимума и единственность решения для уравнения теплопроводности.

Классическая и обобщённая постановки смешанной задачи для одномерного волнового уравнения и уравнения теплопроводности на отрезке. Решение этих задач методом Фурье.

Спектр и собственные функции оператора Лапласа в круге при тривиальном граничном условии. Уравнение и функции Бесселя. Метод Фурье построения обобщённого решения смешанной задачи о колебаниях закреплённой круглой мембраны.

Спектр и собственные функции оператора Лапласа–Бельтрами на сфере трёхмерного пространства. Сферические функции. Метод Фурье построения обобщённого решения задачи Дирихле в шаре.

Интегральные уравнения Фредгольма второго рода. Теоремы Фредгольма для интегральных уравнений с квадратично-интегрируемым ядром.

Гармонические функции и их свойства. Теорема о среднем и принцип максимума для гармонических функций в трёхмерном пространстве. Потенциалы, их применение для решения основных краевых задач для уравнения Лапласа.

## 1. Цели и задачи

### Цель дисциплины

- формирование знаний и навыков в области математического моделирования процессов, описываемых уравнениями в частных производных и интегральными уравнениями, для дальнейшего использования в дисциплинах естественнонаучного содержания;
- формирование математической культуры, исследовательских навыков и способности применять знания на практике.

### Задачи дисциплины

- формирование базовых знаний в области уравнений математической физики;
- формирование общематематической культуры;
- формирование навыков самостоятельно:
  - 1) ставить математическую задачу,
  - 2) обосновывать корректность постановки,
  - 3) применять алгоритмы поиска решений,
  - 4) анализировать и обосновывать результаты.

## 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи

УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
	УК-1.5 Определяет и оценивает практические последствия возможных вариантов решения задачи
УК-6 Способен управлять своим временем, выстраивать и реализовывать траекторию саморазвития на основе принципов образования в течение всей жизни	УК-6.2 Способен планировать самостоятельную деятельность в решении профессиональных задач; подвергать критическому анализу проделанную работу; находить и творчески использовать имеющийся опыт в соответствии с задачами саморазвития
ОПК-2 Способен применять методы математического анализа, математического моделирования и оптимизации для решения задач, возникающих в ходе профессиональной деятельности	ОПК-2.1 Знаком с основными методами математического анализа, математического моделирования и оптимизации
	ОПК-2.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-2.3 Способен определять границы применимости полученных результатов

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны знать:

- все используемые определения;
- формулировки всех именованных теорем.

уметь:

- воспроизводить доказательства всех именованных теорем;
- решать и обосновывать все типовые задачи.

владеть:

- используемой терминологией;
- используемым математическим аппаратом.

### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

#### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Классификация и приведение к каноническому виду в точке.	3	3		3
2	Метод характеристик на плоскости.	3	3		4
3	Уравнение малых колебаний струны.	4	4		4
4	Задача Коши для волнового уравнения в $R_2, R_3$ .	4	4		4
5	Задача Коши для уравнения теплопроводности в $R_n$ .	4	4		4
6	Смешанная задача для волнового уравнения.	4	4		4

7	Смешанная задача уравнения теплопроводности.	4	4		4
8	Внутренняя задача Дирихле для уравнения Лапласа в круге.	4	4		3
9	Уравнение колебаний круглой мембраны; метод Фурье; функции Бесселя.	7	4		17
10	Интегральные уравнения.	7	4		18
11	Задача Штурма-Лиувилля.	6	5		17
12	Уравнение Лапласа в $R^3$ .	6	4		17
13	Краевые задачи для уравнения Лапласа в $R^3$ .	6	4		17
14	Уравнение Лапласа в шаровых областях; метод Фурье; шаровые функции.	7	5		17
15	Потенциалы оператора Лапласа.	6	4		17
Итого часов		75	60		150
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		315 час., 7 зач.ед.			

#### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 5 (Осенний)

##### 1. Классификация и приведение к каноническому виду в точке.

Классификация дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка в точке. Замена декартовой системы координат на криволинейную. Приведение уравнения к каноническому виду в точке; алгоритм приведения.

##### 2. Метод характеристик на плоскости.

Характеристическое уравнение. Характеристика. Уравнение характеристик на плоскости. Приведение к каноническому виду в окрестности для гиперболического и параболического уравнений. Решение уравнений в каноническом виде.

##### 3. Уравнение малых колебаний струны.

Формула Даламбера решения задачи Коши для уравнения колебаний струны. Область зависимости решения от начальных данных. Понятие корректности постановки задачи и пример Адамара некорректной задачи. Корректность задачи Коши для волнового уравнения. Смешанная задача для полубесконечной струны. Необходимые и достаточные условия согласования.

##### 4. Задача Коши для волнового уравнения в $R^2$ , $R^3$ .

Энергетическое неравенство. Принцип Дюамеля. Полная формула Кирхгофа. Метод спуска и полная формула Пуассона. Полная формула Даламбера. Корректность задачи Коши. Принцип Гюйгенса.

##### 5. Задача Коши для уравнения теплопроводности в $R^n$ .

Принцип максимума в  $R^n$ . Принцип Дюамеля. Фундаментальное решение. Полная формула Пуассона. Корректность задачи Коши.

## 6. Смешанная задача для волнового уравнения.

Интеграл энергии и единственность решения. Метод Фурье на отрезке; существования решения.

## 7. Смешанная задача уравнения теплопроводности.

Принцип максимума для ограниченной области и единственность решения. Метод Фурье на отрезке и существование решения.

## 8. Внутренняя задача Дирихле для уравнения Лапласа в круге.

Принцип максимума для уравнения Лапласа. Метод Фурье; формула Пуассона для круга.

Семестр: 6 (Весенний)

## 9. Уравнение колебаний круглой мембраны; метод Фурье; функции Бесселя.

Определение функций Бесселя в виде степенного ряда и их цилиндричность. Рекуррентные соотношения. Свойства нулей и ортогональность с весом. Собственные функции оператора Лапласа в полярной системе координат. Метод Фурье построения формального решения уравнения колебаний круглой мембраны, закреплённой по краю. Представление функций Бесселя в виде комплексного интеграла и асимптотика функций Бесселя на бесконечности.

## 10. Интегральные уравнения.

Эквивалентность интегрального уравнения в вырожденном ядром алгебраической системе и алгоритм построения решений. Три теоремы Фредгольма для интегрального уравнения с вырожденным ядром. Разрешимость интегрального уравнения с малым непрерывным ядром и резольвента. Эквивалентность интегрального уравнения с непрерывным ядром интегральному уравнению в вырожденном ядром и четыре теоремы Фредгольма для интегрального уравнения с непрерывным ядром. Теорема Арчела-Асколи. Наименьшее характеристическое число. Теорема Гильберта-Шмидта для симметричных ядер.

## 11. Задача Штурма-Лиувилля.

Существование и единственность функции Грина задачи Штурма-Лиувилля. Обратимость и положительность оператора Штурма-Лиувилля. Сведение задачи Штурма-Лиувилля к интегральным уравнениям. Кратность и счётность собственных значений оператора Штурма-Лиувилля. Теорема Стеклова. Полнота собственных функций задачи Штурма-Лиувилля.

## 12. Уравнение Лапласа в $R^3$ .

Вторая формула Грина. Фундаментальное решение уравнения Лапласа. Основная интегральная формула. Теорема о среднем и строгий принцип максимума для гармонической функции.

## 13. Краевые задачи для уравнения Лапласа в $R^3$ .

Вторая формула Грина. Фундаментальное решение уравнения Лапласа. Основная интегральная формула. Теорема о среднем и строгий принцип максимума для гармонической функции; единственность решения внутренней задачи Дирихле. Единственность решения внешней задачи Дирихле. Неединственность решения внутренней задачи Неймана и необходимое условие разрешимости. Единственность решения внешней задачи Неймана. Функция Грина внутренней задачи Дирихле для оператора Лапласа. Основное интегральное представление. Функция Грина и формула Пуассона для шара.

#### 14. Уравнение Лапласа в шаровых областях; метод Фурье; шаровые функции.

Разложение в степенной ряд производящей функции для полиномов Лежандра. Ортогональность и полнота присоединённых функций Лежандра. Собственные функции угловой части оператора Лапласа. Ортогональность и полнота сферических функций. Гармоничность шаровых функций. Интегральная формула для сферических функций и их полнота. Формула сложения для полиномов Лежандра. Формула Лапласа. Метод Фурье для шара.

#### 15. Потенциалы оператора Лапласа.

Свойства объёмного потенциала, потенциала двойного слоя и потенциала простого слоя. Сведение краевых задач Дирихле и Неймана к интегральным уравнениям.

### 5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная доской, мультимедиапроектором и экраном.

### 6. Перечень рекомендуемой литературы

#### Основная литература

1. Уравнения математической физики [Текст] : учебник для вузов : рек. М-вом образования РФ / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский ; Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова .— 7-е изд. — М. : Изд-во МГУ ; Наука, 2004 .— 798 с.
  2. Лекции по уравнениям математической физики [Текст] : учеб. пособие: рек. Учеб.-метод. советом МФТИ / В. П. Михайлов .— М : Физматлит, 2001 .— 206 с.
  3. Уравнения математической физики [Текст] : учеб. пособие для вузов / В. М. Уроев .— М. : Яуза, 1998 .— 373 с.
- Владимиров, В. С.  
Уравнения математической физики [Текст] : учебник для вузов / В. С. Владимиров, В. В. Жаринов .— 2-е изд., стереотип. — М. : Физматлит, 2000, 2004, 2008 .— 400 с. - Библиогр.: с. 399. - 3000 экз. - ISBN 5-9221-0310-5 (в пер.) .— Полный текст (Доступ из сети МФТИ / Удаленный доступ).

#### Дополнительная литература

1. Сборник задач по уравнениям математической физики [Текст] / В. С. Владимиров [и др.] - М. ФИЗМАТЛИТ, 2016

### 7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

1. <http://lib.mipt.ru/catalogue/1604/?t=492> – электронная библиотека Физтеха, раздел «Уравнения математической физики».
2. <http://www.exponenta.ru> – образовательный математический сайт.
3. <http://mathnet.ru> – общероссийский математический портал.
4. <http://www.edu.ru> – федеральный портал «Российское образование».
5. <http://benran.ru> – библиотека по естественным наукам Российской академии наук.
6. <http://www.i-exam.ru> – единый портал Интернет-тестирования в сфере образования.

### 8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

Не требуются.

### 9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Успешное освоение курса уравнений математической физики требует напряжённой работы студента МФТИ, начинающейся с конспектирования: 1) приводимых на лекциях определений и теорем с доказательствами, 2) приводимых и обсуждаемых на семинарах решений типовых задач.

По мере обучения студенту следует выучить: 1) все определения, формулировки именованных теорем с доказательствами; 2) алгоритмы получения и обоснования решений типовых задач, разбираемых на семинарах в обязательном порядке; 3) самостоятельно решить остальные задачи заданий.

Студент имеет возможность обучаться (частично или полностью) путём использования любых источников знаний для усвоения: 1) предусмотренных курсом определений и теорем с доказательствами вплоть до безошибочного воспроизведения; 2) предусмотренных курсом типовых задач вплоть до безошибочного воспроизведения и обоснования решений.

Текущий контроль за успеваемостью студентов осуществляется во время проверки письменных работ и устной защиты предусмотренных заданий.

Доп. литература:

1. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. – 5-е изд. – М.: Наука, 1992.
2. Масленникова В.Н. Дифференциальные уравнения в частных производных. – 5-е изд. – М.: Изд-во РУДН, 1997
3. Олейник О.А. Лекции об уравнениях с частными производными. – 2-е изд. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005.
4. Михайлов В.П., Гуцин А.К. Дополнительные главы курса «Уравнений математической физики». – М.: МИАН, 2007, Лекционные курсы НОЦ. Вып. 7.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

<b>по направлению:</b>	Техническая физика
<b>профиль подготовки:</b>	Техническая физика космических летательных аппаратов Физтех-школа Аэрокосмических Технологий кафедра высшей математики
<b>курс:</b>	<u>3</u>
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестры, формы промежуточной аттестации:

5 (осенний) - Дифференцированный зачет  
6 (весенний) - Экзамен

**Разработчик:** В.В. Шаньков, канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент



## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
	УК-1.5 Определяет и оценивает практические последствия возможных вариантов решения задачи
УК-6 Способен управлять своим временем, выстраивать и реализовывать траекторию саморазвития на основе принципов образования в течение всей жизни	УК-6.2 Способен планировать самостоятельную деятельность в решении профессиональных задач; подвергать критическому анализу проделанную работу; находить и творчески использовать имеющийся опыт в соответствии с задачами саморазвития
ОПК-2 Способен применять методы математического анализа, математического моделирования и оптимизации для решения задач, возникающих в ходе профессиональной деятельности	ОПК-2.1 Знаком с основными методами математического анализа, математического моделирования и оптимизации
	ОПК-2.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-2.3 Способен определять границы применимости полученных результатов

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Уравнения математической физики» обучающийся должен:

### знать:

- все используемые определения;
- формулировки всех именованных теорем.

### уметь:

- воспроизводить доказательства всех именованных теорем;
- решать и обосновывать все типовые задачи.

### владеть:

- используемой терминологией;
- используемым математическим аппаратом.

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Текущий контроль осуществляется на основе балльно-рейтинговой системы (БРС) оценки знаний по изучаемой дисциплине. БРС учитывает выполнение студентами совокупности домашних заданий и контрольных работ в соответствии с учебным планом. Данные о посещаемости и текущей успеваемости вносятся преподавателями в специальные журналы и учитываются в БРС.

Текущий контроль на основе домашних заданий осуществляется в течении учебного семестра в сроки, установленные Учебным управлением, в соответствии с учебным планом.

Для сдачи задания студент обязан предоставить решение задачи домашнего задания в письменной форме, ответить на вопросы преподавателя и написать контрольную работу по заданию, по которой проверяются знание понятий и утверждений по темам сдаваемого задания и умению решать задачи.

Во время выполнения контрольной работы нельзя пользоваться помощью других лиц, вычислительной техники и мобильными телефонами.

#### 4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Линейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Классификация.
2. Приведение к каноническому виду.
3. Уравнения Лапласа, Пуассона, волновое уравнение, теплопроводности и другие.
4. Общие решения. Преобразования, сохраняющие вид уравнения. Принцип суперпозиции решений.
5. Тиражирование решений. Автомодельные решения. Примеры.
6. Линейное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами.
7. Замена независимых переменных и приведение к каноническому виду уравнения с двумя независимыми переменными.
8. Классификация в точке и в области. Характеристики.
9. Постановка задач математической физики. Типичные задачи. Краевые и начальные условия.
10. Задачи: Коши; краевые; смешанные.
11. Многомерные операторы сдвига. Свойства. Применения.
12. Задача Коши и представление ее решения для линейного уравнения с частными производными первого порядка.
13. Решение задачи Коши (волновое уравнение; уравнение теплопроводности) для квазимоночленных входных данных.
14. Задача Коши для уравнения колебаний струны ( $n=1$ ). Формула Даламбера.
15. Задачи для полуограниченной прямой.
16. Задача Коши для волнового уравнения ( $n=3$ ). Формула Кирхгофа.
17. Задача Коши для уравнения колебаний мембраны ( $n=2$ ). Формула Пуассона (метод спуска). Единственность решения задачи Коши.
18. Линейное гиперболическое уравнение с частными производными высокого порядка и с двумя независимыми переменными. Задача Коши и представление ее решения. Характеристики.
19. Линейная гиперболическая система уравнений с частными производными первого порядка и с двумя независимыми переменными. Задача Коши и представление ее решения. Характеристики.
20. Смешанная задача для уравнения колебаний струны на отрезке. Единственность решения.
21. Принцип суперпозиции решений и метод разделения переменных.
22. Задача с данными на характеристике (задача Гурса).
23. Задача Штурма--Лиувилля на отрезке. Функция Грина оператора Штурма--Лиувилля.
24. Уравнения Лапласа, Пуассона и Гельмгольца. Гармонические функции и их свойства.
25. Принцип максимума. Преобразование Кельвина.
26. Лапласиан в полярных, цилиндрических и сферических координатах.
27. Фундаментальные решения ( $n=1$ ,  $n=2$ ,  $n \geq 4$ ) и дельта-функция.
28. Основные краевые задачи (внутренние; внешние): задача Дирихле; задача Неймана.
29. Теоремы единственности. Формулы Грина. Функция Грина задачи Дирихле.
30. Представление решения задачи Дирихле (в круге и шаре, в полуплоскости и полупространстве) через краевые значения.
31. Конформные отображения и их использование для решения задачи Дирихле и для построения функции Грина.
32. Метод разделения переменных и решение краевых задач в  $R^2$ .

#### Критерии оценивания

Оценка «отлично (10)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;

оценка «отлично (9)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений, но при этом были допущены небольшие неточности, которые были самостоятельно обнаружены и исправлены;

оценка «отлично (8)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений, но при этом были допущены небольшие неточности, которые после указания экзаменатора были самостоятельно исправлены;

оценка «хорошо (7)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает неточности в ответе или делает несущественные ошибки при решении задач;

оценка «хорошо (6)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает небольшие ошибки в ответе и (или) при решении задач;

оценка «хорошо (5)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но отвечает неуверенно и (или) допускает ошибки при решении задач;

оценка «удовлетворительно (4)» выставляется обучающемуся, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, неточные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, если при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «удовлетворительно (3)» выставляется обучающемуся, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, неточные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, не владеющему некоторыми разделами учебной программы, но умеющему применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется обучающемуся, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;

оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется обучающемуся, показавшему полное незнание учебной программы дисциплины.

## **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

Дифференцированный зачет проводится по итогам текущей успеваемости и сдачи заданий, предусмотренных программой дисциплины, с учетом набранных очков по БРС.

Время проведения письменного экзамена составляет четыре астрономических часа. Во время проведения письменного экзамена обучающиеся могут пользоваться только ручкой, карандашом и бумагой.

«СОГЛАСОВАНО»

Проректор по учебной работе и довузовской подготовке

А. А. Воронов

« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2018

## Балльно-рейтинговая система оценки знаний студентов

по дисциплине «Уравнения математической физики», 3 курс, 5 семестр,  
дифференцированный зачет, кафедра высшей математики

Виды заданий	Сумма баллов
1. Контрольная работа № 1 по 1-му заданию	0 – 9
2. Контрольная работа № 2 по 2-му заданию	0 – 9
3. Задание № 1 (тетрадь и ее защита)	0 – 3
4. Задание № 2 (тетрадь и ее защита)	0 – 3
5. Проверка теоретических знаний (не более трёх лекционных контрольных)	0 – 3
6. Работа на семинарах	0 – 3
ИТОГО	0 – 30

Дифференцированный зачет выставляется по результатам работы в семестре в соответствии со следующей шкалой

Баллы БРС	Оценки	
29-30	10	отлично
27-28	9	
25-26	8	
23-24	7	хорошо
21-22	6	
19-20	5	
17-18	4	удовлетворительно
15-16	3	
10 – 14	2	неудовлетворительно
0 – 9	1	

Если сумма баллов за работу в семестре меньше 15, то в зачетную неделю студенту предоставляется возможность повысить свою оценку. Итоговая оценка не может быть повышена более чем на два балла по десятибалльной шкале.

Студенты, имеющие неудовлетворительную оценку к началу экзаменационной сессии, ликвидируют академическую задолженность в установленные для этого сроки. При этом итоговая оценка студента не может быть повышена более чем на два балла по десятибалльной шкале.

Регламент принятия домашних заданий и проведения зачета определяется «Положением о текущем контроле успеваемости и промежуточной аттестации студентов на кафедре высшей математики».

Зав. кафедрой

Г.Е. Иванов

**Балльно-рейтинговая система оценки знаний студентов**

Дисциплина: Уравнения математической физики, 3 курс, 6 семестр, экзамен.

Кафедра: высшей математики

№	Виды занятий	Сумма баллов
1.	Контрольная работа № 1 по сдаче 1 задания	0 – 9
2.	Контрольная работа № 2 по сдаче 2 задания	0 – 9
3.	Задание № 1	0 – 3
4.	Задание № 2	0 – 3
5.	Проверка теоретических знаний	0 – 3
6.	Работа на семинарах	0 – 3
7.	Письменная работа	0 – 30
8.	Итоговый контроль. Экзамен (устный ответ)	0 – 60
	<b>ИТОГО</b>	<b>0 – 120</b>

Сумма баллов  $\Sigma$  промежуточной аттестации вычисляется по формуле :

$\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 \leq 120$ , где  $\Sigma_1$ - за работу в семестре, ( $0 \leq \Sigma_1 \leq 30$ );  $\Sigma_2$ - за письменную работу;  $\Sigma_2 = 3 \cdot K$ ,  $1 \leq K \leq 10$ , K-оценка за письменную работу. Если письменная работа написана на 0 баллов, то  $\Sigma_2 = 0$ .  $\Sigma_3$ - за устный экзамен;  $\Sigma_3 = 6 \cdot n$ ,  $3 \leq n \leq 10$ , где n-оценка за устный экзамен. Если n=1 или 2, то итоговая оценка совпадает с n, при этом  $\Sigma_3$  не вычисляется.

Соответствие оценок итоговой академической успеваемости балльно-рейтинговой системы.

Баллы БРС	Оценки	
112– 120	10	отлично
103 – 111	9	
94 – 102	8	
85 – 93	7	хорошо
76 – 84	6	
67 – 75	5	
54 – 66	4	удовлетворительно
41 – 53	3	
28 – 40	2	
0 – 27	1	неудовлетворительно

Регламент принятия домашних заданий и проведения экзамена определяется «Положением о текущем контроле успеваемости и промежуточной аттестации студентов на кафедре высшей математики».

Зав. кафедрой

\_\_\_\_\_ Г.Е. Иванов

1.(6) Решить задачу и указать наибольшую область единственности решения

$$\begin{aligned} (x^2 - 4)u_{xx} - 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} + 2xu_x &= 0, & x, y > 0; \\ u|_{x=0} = 4y, \quad u_x|_{x=0} &= 8y^2, & y > 1. \end{aligned}$$

2.(5) Решить смешанную задачу для полупрямой

$$\begin{aligned} u_{tt} + u_{xt} - 2u_{xx} &= 0, & x > 0, \quad t > 0; \\ u|_{t=0} = \operatorname{sh} x + \operatorname{arctg} x, \quad u_t|_{t=0} &= \operatorname{ch} x - \frac{2}{1+x^2}, & x \geq 0; \\ u_x|_{x=0} &= \operatorname{ch} t + 1, & t \geq 0. \end{aligned}$$

3.(6) Найти формальное решение смешанной задачи для отрезка

$$\begin{aligned} 9u_t &= 4u_{xx} - (70x + \pi)e^{-4t}, & 0 < x < \pi/2, \quad t > 0; \\ u|_{t=0} &= 2x + \cos x, & 0 \leq x \leq \pi/2; \\ u_x|_{x=0} &= 2 \cdot e^{-4t}, \quad u|_{x=\pi/2} = \pi \cdot e^{-4t}, & t \geq 0. \end{aligned}$$

4.(5) Решить задачу Коши

$$\begin{aligned} u_{tt} &= 3\Delta u - 3t^2 e^{-2x} \sin(y - 2z), & x, y, z \in \mathbb{R}, \quad t > 0; \\ u|_{t=0} &= 2\sqrt[3]{1 + (x - y + z)^2}, & x, y, z \in \mathbb{R}; \\ u_t|_{t=0} &= 12(x - y + z)e^{-(x-y+z)^2} + x^2 - 2y^2 + 3z^2, & x, y, z \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

5.(4) Решить краевую задачу для сферического слоя

$$\begin{aligned} \Delta u &= 12r, & 1 < r < 2; \\ (u - u_r)|_{r=1} &= 4 + 3\sin\theta \cdot \sin\varphi, \quad u|_{r=2} = 11, & 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \end{aligned}$$

6.(4) Найти характеристические числа и собственные функции ядра. Решить интегральное уравнение для тех  $\lambda$ , когда решение существует

$$u(x) = \lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (x \sin y + \sin 3x) u(y) dy + \sin x.$$

7.(4) Найти формальное решение смешанной задачи для круга

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \Delta u + \sin \mu_{01} t, & 0 < r < 1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad t > 0; \\ u|_{t=0} &= J_0(\mu_{01} r), \quad u_t|_{t=0} = 0, & 0 < r < 1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ |u|_{r=0} &< \infty, \quad u|_{r=1} = 0, & 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad t > 0; \end{aligned}$$

где  $\mu_{01}$  – первый положительный нуль функции Бесселя  $J_0(r)$ .

1.(6) Решить задачу и указать наибольшую область единственности решения

$$\begin{aligned} u_{xx} - 2(2x+1)u_{xy} + 4x(x+1)u_{yy} - 2u_y &= 0, & x, y > 0; \\ u|_{x=0} = y^2, \quad u_x|_{x=0} &= 2y, & 0 < y < 1. \end{aligned}$$

2.(5) Решить смешанную задачу для полупрямой

$$\begin{aligned} 2u_{tt} - u_{xt} - u_{xx} &= 0, & x > 0, \quad t > 0; \\ u|_{t=0} = \sin x + \operatorname{th} 2x, \quad u_t|_{t=0} &= \cos x - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 2x}, & x \geq 0; \\ u_x|_{x=0} &= \cos t + 2, & t \geq 0. \end{aligned}$$

3.(6) Найти формальное решение смешанной задачи для отрезка

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \pi^2 u_{xx}, & 0 < x < \pi, \quad t > 0; \\ u|_{t=0} &= \pi \sin 2x, \quad u_t|_{t=0} = 0, & 0 \leq x \leq \pi; \\ u|_{x=0} &= 0, \quad u|_{x=\pi} = \pi \sin \pi t, & t \geq 0. \end{aligned}$$

4.(5) Решить задачу Коши

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{1}{2} \Delta u + 5 \sin t \cdot \sin(x+2y) \cdot \operatorname{ch} z, & x, y, z \in \mathbb{R}, \quad t > 0; \\ u|_{t=0} &= \left( z + yz^3 \right) e^{-x^2+2x}, & x, y, z \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

5.(4) Решить краевую задачу для сферического слоя

$$\begin{aligned} \Delta u &= 8/r, & 1/2 < r < 1; \\ u|_{r=1/2} &= 6, \quad (u + u_r)|_{r=1} = 10 - 17 \cos \theta, & 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \end{aligned}$$



6.(4) Найти характеристические числа и собственные функции ядра. Решить интегральное уравнение для тех  $\lambda$ , когда решение существует

$$u(x) = \lambda \int_{-1}^1 (x \operatorname{sh} y + \operatorname{sh} 2x) u(y) dy + \operatorname{ch} 2x$$

7.(4) Найти формальное решение смешанной задачи для круга

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \Delta u - \cos \mu_{02} t, & 0 < r < 1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad t > 0; \\ u|_{t=0} &= 0, \quad u_t|_{t=0} = J_0(\mu_{02} r), & 0 < r < 1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ |u|_{r=0} &< \infty, \quad u|_{r=1} = 0, & 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad t > 0; \end{aligned}$$

где  $\mu_{02}$  – второй положительный нуль функции Бесселя  $J_0(r)$ .

1.(6) Решить задачу и указать наибольшую область единственности решения

$$\begin{aligned} (x^2 - 1)u_{xx} - 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} + 2xu_x &= 0, & x, y > 0; \\ u|_{x=0} = y^2, \quad u_x|_{x=0} &= 2y, & y > 1. \end{aligned}$$

2.(5) Решить смешанную задачу для полупрямой

$$\begin{aligned} u_{tt} + 2u_{xt} - 3u_{xx} &= 0, & x > 0, \quad t > 0; \\ u|_{t=0} = x + \operatorname{ch} x, \quad u_t|_{t=0} &= \operatorname{sh} x - 3, & x \geq 0; \\ u_x|_{x=0} = \operatorname{sh} t + \frac{1}{1+9t^2}, & & t \geq 0. \end{aligned}$$

3.(6) Найти формальное решение смешанной задачи для отрезка

$$\begin{aligned} 3u_t &= 9u_{xx} + (\pi - 10x)e^{-3t}, & 0 < x < \pi, \quad t > 0; \\ u|_{t=0} &= x + \cos 2x, & 0 \leq x \leq \pi; \\ u_x|_{x=0} &= e^{-3t}, \quad u_x|_{x=\pi} = e^{-3t}, & t \geq 0. \end{aligned}$$

4.(5) Решить задачу Коши

$$\begin{aligned} u_{tt} &= 2\Delta u + 5e^{-(t+\sqrt{3}y)} \cos(2x-z), & x, y, z \in \mathbb{R}, \quad t > 0; \\ u|_{t=0} &= 2\sqrt{3+(x-y)^2}, & x, y, z \in \mathbb{R}; \\ u_t|_{t=0} &= \frac{8}{1+(x-y)^2} + (x^2 + y^2)z, & x, y, z \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

5.(4) Решить краевую задачу для сферического слоя

$$\begin{aligned} \Delta u &= 6, & 1 < r < 2; \\ (u - u_r)|_{r=1} &= -1 - 6\sin\theta \cdot \cos\varphi, \quad u|_{r=2} = 7, & 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \end{aligned}$$

6.(4) Найти характеристические числа и собственные функции ядра. Решить интегральное уравнение для тех  $\lambda$ , когда решение существует

$$u(x) = \lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (x \sin 3y - \sin x) u(y) dy + \sin 3x.$$

7.(4) Найти формальное решение смешанной задачи для круга

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \Delta u - \sin \mu_{02} t, & 0 < r < 1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad t > 0; \\ u|_{t=0} &= J_0(\mu_{02} r), \quad u_t|_{t=0} = 0, & 0 < r < 1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ |u|_{r=0} &< \infty, \quad u|_{r=1} = 0, & 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad t > 0; \end{aligned}$$

где  $\mu_{02}$  — второй положительный нуль функции Бесселя  $J_0(r)$ .

1.(6) Решить задачу и указать наибольшую область единственности решения

$$\begin{aligned} u_{xx} - 4(x+1)u_{xy} + 4x(x+2)u_{yy} - 2u_y &= 0, & x, y > 0; \\ u|_{x=0} = 5y, \quad u_x|_{x=0} &= 4y, & 0 < y < 1. \end{aligned}$$

2.(5) Решить смешанную задачу для полупрямой

$$\begin{aligned} 3u_{tt} - 2u_{xt} - u_{xx} &= 0, & x > 0, \quad t > 0; \\ u|_{t=0} = \cos x + 3x, \quad u_t|_{t=0} &= -\sin x - 1, & x \geq 0; \\ u_x|_{x=0} = \frac{3}{\operatorname{ch}^2 t} - \sin t, & & t \geq 0. \end{aligned}$$

3.(6) Найти формальное решение смешанной задачи для отрезка

$$\begin{aligned} u_{tt} &= e^2 u_{xx}, & 0 < x < \pi/2, \quad t > 0; \\ u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} &= e \cdot \sin 3x, & 0 \leq x \leq \pi/2; \\ u|_{x=0} = \pi \cdot \cos et, \quad u_x|_{x=\pi/2} &= -2 \cos et, & t \geq 0. \end{aligned}$$

4.(5) Решить задачу Коши

$$\begin{aligned} u_t &= 2\Delta u + 17 \cos t \cdot \operatorname{sh}(y-z) \cdot \cos 2x, & x, y, z \in \mathbb{R}, \quad t > 0; \\ u|_{t=0} &= (xy^2 - yx^3) e^{-z^2 - 4z}, & x, y, z \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

5.(4) Решить краевую задачу для сферического слоя

$$\begin{aligned} \Delta u &= 2/r^4, & 1/2 < r < 1, \\ u|_{r=1/2} = 7, \quad (u + u_r)|_{r=1} &= \cos \theta, & 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \end{aligned}$$

6.(4) Найти характеристические числа и собственные функции ядра. Решить интегральное уравнение для тех  $\lambda$ , когда решение существует

$$u(x) = \lambda \int_{-1/2}^{1/2} (x \operatorname{sh} 2y - \operatorname{sh} x) u(y) dy + \operatorname{ch} x.$$

7.(4) Найти формальное решение смешанной задачи для круга

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \Delta u + \cos \mu_{01} t, & 0 < r < 1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} &= 0, \quad u_t|_{t=0} = J_0(\mu_{01} r), & 0 < r < 1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \\ |u|_{r=0} &< \infty, \quad u|_{r=1} = 0, & 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad t > 0, \end{aligned}$$

где  $\mu_{01}$  – первый положительный нуль функции Бесселя  $J_0(r)$ .